PART3　等比数列の和

要点 ①　等比数列の和

初項 2，公比 3 の等比数列の初項から第 5 項までの和を求める。

求める和を S とすると

$$S=2+2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+2\cdot3^4 \quad \cdots\cdots \quad ①$$

①の両辺に公比 3 を掛けると

$$3S=2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+2\cdot3^4+2\cdot3^5 \quad \cdots\cdots \quad ②$$

① − ②より

$$\begin{array}{rrl} & S= & 2+2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+2\cdot3^4 \\ -) & 3S= & 2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+2\cdot3^4+2\cdot3^5 \\ \hline & S-3S= & 2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -2\cdot3^5 \end{array}$$

$$(1-3)S=2(1-3^5)$$

よって $S=\dfrac{2(1-3^5)}{1-3}=242$

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を求める。

求める和を S_n とすると

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1} \quad \cdots\cdots \quad ③$$

③の両辺に公比 r を掛けると

$$rS_n=ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n \quad \cdots\cdots \quad ④$$

③ − ④より

$$\begin{array}{rrl} & S_n= & a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1} \\ -) & rS_n= & ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n \\ \hline & S_n-rS_n= & a \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -ar^n \end{array}$$

$$(1-r)S_n=a(1-r^n)$$

よって，$r\neq1$ のとき　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

④ − ③より，$(r-1)S_n=a(r^n-1)$ であるから，　$r\neq1$ のとき $S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

また，$r=1$ のとき　$S_n=$　＋　＋　＋……＋　＝　a

したがって，次のことが成り立つ。

等比数列の和

初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和を S_n とする。

$r \neq 1$ のとき　　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r=1$ のとき　　$S_n=na$

例　初項 3，公比 2，項数 5 の等比数列の和は

$$\frac{\quad\cdot(1-\quad)}{1-\quad}=\frac{\quad\cdot(\quad-1)}{\quad-1}=3\cdot 31=93$$

初項 -2，公比 1，項数 10 の等比数列の和は

$$\quad\cdot\quad=-20$$

3　(1)　初項 5，公比 2，項数 6 の等比数列の和 S を求めよ。

(2)　初項 8，公比 -3，項数 5 の等比数列の和 S を求めよ。

(3)　初項 1，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

Point Pickup

等比数列の和

初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和 S_n は

$r \neq 1$ のとき　$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$　……　$\dfrac{初項\times(1-公比^n)}{1-公比}$

$= \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$　……　$\dfrac{初項\times(公比^n-1)}{公比-1}$

$r = 1$ のとき　$S_n = na$　……　項数×初項

特に

$r > 1$ のとき(公比が 1 より大きいとき)は　$S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r < 1$ のとき(公比がマイナス，または 0 から 1 の間のとき)は $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

を用いると，分母がプラスとなり計算が楽になる。

第 2 講　PART3 確認問題

1 初項3，公比2，項数7の等比数列の和は アイウ である。

2 初項1，公比 -3，項数5の等比数列の和は エオ である。

3 初項2，公比5の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は，

$$S_n = \frac{\boxed{カ}^n - \boxed{キ}}{\boxed{ク}}$$

である。

PART3 等比数列の和

3 (1) 初項5，公比2，項数6の等比数列の和 S を求めよ。

(2) 初項8，公比 -3，項数5の等比数列の和 S を求めよ。

(3) 初項1，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

[解答]

(1) $S=\dfrac{5(2^6-1)}{2-1}=5\cdot 63=315$

(2) $S=\dfrac{8\{1-(-3)^5\}}{1-(-3)}=2\cdot 244=488$

(3) $S_n=\dfrac{1\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

第2講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイウ：381

[解説]

初項3，公比2，項数7の等比数列の和 S は，

$$S=\frac{3(2^7-1)}{2-1} \quad \text{[A]}$$

$$=3\cdot127=\mathbf{381}$$

[A]　初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和 S_n は，
$r \neq 1$ のとき，

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

2

[正解] エオ：61

[解説]

初項1，公比 -3，項数5の等比数列の和 S は，

$$S=\frac{1\cdot\{1-(-3)^5\}}{1-(-3)} \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{1+243}{4}=\mathbf{61}$$

[B]　初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和 S_n は，
$r \neq 1$ のとき，

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

3

[正解] カ：5，キ：1，ク：2

[解説]

初項2，公比5の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は，

$$S_n=\frac{2(5^n-1)}{5-1} \quad \text{[C]}$$

$$=\mathbf{\frac{5^n-1}{2}}$$

[C]　初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和 S_n は，
$r \neq 1$ のとき，

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$